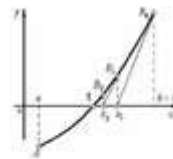


Метод касательных (метод Ньютона)

Метод касательных (метод Ньютона) — это итерационный численный метод для приближённого нахождения корня (нуля) заданной функции. Метод был впервые предложен английским физиком, математиком и астрономом Исааком Ньютоном.

Метод Ньютона (касательной)

В качестве исходной точки x_0 выбирается тот конец интервала $[a, b]$, которому отвечает ордината того же знака, что и знак $f''(x)$.



$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Геометрическая интерпретация

Метод основан на замене дуги кривой $y = f(x)$ на касательную к ней в одной из точек.

Суть геометрической интерпретации:

1. Задаётся начальное приближение x_0 вблизи предположительного корня.
2. В точке $(x_0, f(x_0))$ строится касательная к графику функции $y = f(x)$.
3. Находится точка пересечения этой касательной с осью абсцисс — она принимается за следующее приближение x_1 .
4. Процесс повторяется до достижения заданной точности.

Итерационная формула

Последовательные приближения определяются по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n),$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ — номер итерации.

Условия применимости

Для сходимости метода необходимо выполнение следующих условий:

- функция $f(x)$ должна быть непрерывной и дважды дифференцируемой на рассматриваемом отрезке $[a, b]$;
- на отрезке $[a, b]$ должен быть только один простой корень;
- производные $f'(x)$ и $f''(x)$ на отрезке сохраняют знаки, и $f'(x) \neq 0$;
- начальное приближение x_0 должно удовлетворять условию $f(x_0) \cdot f'(x_0) > 0$ (знаки функций $f(x)$ и $f'(x)$ в точке x_0 совпадают).

Особенности метода

- Квадратичная сходимость. В окрестности корня метод сходится быстро: количество правильных цифр аппроксимации примерно удваивается с каждым дополнительным шагом.
- Ограничения. Метод эффективен при жёстких ограничениях на характер функции: существование второй производной, знакопостоянство производных на отрезке и др.. Если эти условия не выполняются, метод может не сходиться или сходиться медленно.
- Сложность вычисления производной. Если производная функции сложная, это может снизить эффективность метода.

Дополнительные замечания

- Метод Ньютона можно использовать не только для решения уравнений, но и для задач оптимизации, где требуется найти ноль первой производной или градиента в многомерном пространстве.

- В некоторых случаях метод Ньютона может быть стабилизирован с помощью последовательного «чрезмерного расслабления» или других модификаций.

- Для повышения надёжности часто устанавливают ограничения на количество итераций, привязывают решение к интервалу, который, как известно, содержит корень, и комбинируют метод с более надёжными методами нахождения корня.